УДК 735.29.(32)

# ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

**Резникова И.А.**
**Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Андреев В.К.**

***Сибирский федеральный университет***

## 1. Постановка задачи

Имеются две функции $u_1(r,\theta,\varphi)$, $u_2(r,\theta,\varphi)$, зависящие от сферических координат $(r,\theta,\varphi)$. Функция $u_1\,(r,\theta,\varphi)$ определена в шаре $0 \le r \le R_1$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, а $u_2(r,\theta,\varphi)$ - в слое $R_1 \le r \le R_2$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Функции $u_{1,2}$ в своих областях определения удовлетворяют уравнениям

$$-k_1\Delta\, u_1 = \lambda\, u_1,\ \ (r,\theta,\varphi) \ \square\ \Omega_1, \tag{1.1}$$

$$-k_2\Delta\, u_2 = \lambda\, u_2,\ \ (r,\theta,\varphi) \ \square\ \Omega_2, \tag{1.2}$$

где $k_{1,2}$ – известные положительные постоянные; $\lambda$ – неизвестный параметр; $\Omega_{1,2}$ – открытый шар радиуса $R_1$ и открытый слой $R_1 < r < R_2$, соответственно.

Кроме того, имеются граничные условия

$$u_1|_{r=R_1} = u_2|_{r=R_1}, \tag{1.3}$$

$$k_1\frac{\partial u_1}{\partial r}|_{r=R_1} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial r}|_{r=R_1}, \tag{1.4}$$

$$u_2|_{r=R_2} = 0. \tag{1.5}$$

Требуется найти функции $u_1 \ \square\ C^2(\Omega_1)\cap C^1(\Gamma_1)$, $\Gamma_1 = \{r \mid r = R_1\}$, $u_2 \ \square\ C^2(\Omega_2)\cap C^1(\Gamma_1)\cap C(\Gamma_2)$, $\Gamma_2 = \{r \mid r = R_2\}$ и параметр $\lambda$, удовлетворяющие уравнениям (1.1), (1.2) и условиям (1.3) – (1.5).

## 2. Доказательство положительности спектрального параметра

Применим формулу Остроградского-Гаусса к (1.1), (1.2) (черта означает комплексно сопряжённую величину)

$$-k_1\int\limits_{\Omega_1}\Delta u_1\bar{u}_1 d\Omega_1 = k_1\left(\int\limits_{\Omega_1}|\nabla u_1|^2 d\Omega_1 - \int\limits_{\Gamma_1}\bar{u}_1\frac{\partial u_1}{\partial r}d\Gamma_1\right) = \lambda\int\limits_{\Omega_1}|u_1|^2 d\Omega_1,$$

$$-k_2\int\limits_{\Omega_2}\Delta u_2\bar{u}_2 d\Omega_2 = k_2\left(\int\limits_{\Omega_2}|\nabla u_2|^2 d\Omega_2 + \int\limits_{\Gamma_1}\bar{u}_2\frac{\partial u_2}{\partial r}d\Gamma_1 - \int\limits_{\Gamma_2}\bar{u}_2\frac{\partial u_2}{\partial r}d\Gamma_2\right) =$$

$$= \lambda\int\limits_{\Omega_2}|u_2|^2 d\Omega_2.$$

Складывая и пользуясь граничными условиями (1.3) – (1.5), выводим равенство

$$\lambda\left(\int\limits_{\Omega_1}|u_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2}|u_2|^2 d\Omega_2\right) = k_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla u_1|^2 d\Omega_1 + k_2\int\limits_{\Omega_2}|\nabla u_2|^2 d\Omega_2.$$

Следовательно, $\lambda > 0$. Если $\lambda = 0$, то $u_j \equiv 0$, $j = 1, 2$. Далее будем считать $\lambda > 0$ и искать нетривиальные решения.

## 3. Разделение переменных

$$-k_j\Delta u_j = -k_j\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_j}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_j}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_j}{\partial\varphi^2}\right) = \lambda u_j.$$

Полагаем $u_j(r,\theta,\varphi) = R_j(r)\,T(\theta,\varphi)$:

$$-k_j\left(\frac{T}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_j}{dr}\right)+\frac{R_j}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}\right)\right)=\lambda R_j T. \quad (3.1)$$

Пусть $T(\theta,\varphi)$ – решение уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}=-\mu T.$$

Оно имеет вид:

$$T_n(\theta,\varphi)=a_0P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\,P_n^{(k)}(\cos\theta).$$

Для $R_j(r)$ имеем из (3.1) уравнение, родственное уравнению Бесселя

$$r^2R_j''+2rR_j'+R_j\left(\frac{\lambda}{k_j}r^2-\mu\right)=0.$$

Его решение таково:

$$R_{jn}=r^{-\frac{1}{2}}\left(C_1^jJ_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_j}}\right)+C_2^jY_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_j}}\right)\right).$$

$C_2^1=0$, так как $|u_1(0,\theta,\varphi)|<\infty$; не ограничивая общности можно считать $C_1^1=1$. Следовательно

$$R_{1n}=r^{-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}\right),$$

$$R_{2n}=r^{-\frac{1}{2}}\left(C_1J_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)+C_2Y_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)\right),$$

$$u_{jn}(r,\theta,\varphi)=R_{jn}(r)T_n(\theta,\varphi).$$

Подставляя решение в граничные условия (1.3) – (1.5), найдём $C_1$, $C_2$ и уравнение на $\lambda$:

$$C_1=\frac{Y_{n+\frac{1}{2}}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}\right)}{Y_{n+\frac{1}{2}}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)-Y_{n+\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)},$$

$$C_2=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}\right)}{Y_{n+\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)-Y_{n+\frac{1}{2}}\left(R_2\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)},$$

$$k_1\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}J_{n-\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}\right)-\frac{n+1}{R_1}J_{n+\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}\right)\right)=$$

$$=k_2C_1\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}J_{n-\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)-\frac{n+1}{R_1}J_{n+\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)\right)+$$

$$+k_2C_2\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}Y_{n-\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)-\frac{n+1}{R_1}Y_{n+\frac{1}{2}}\left(R_1\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}\right)\right).$$

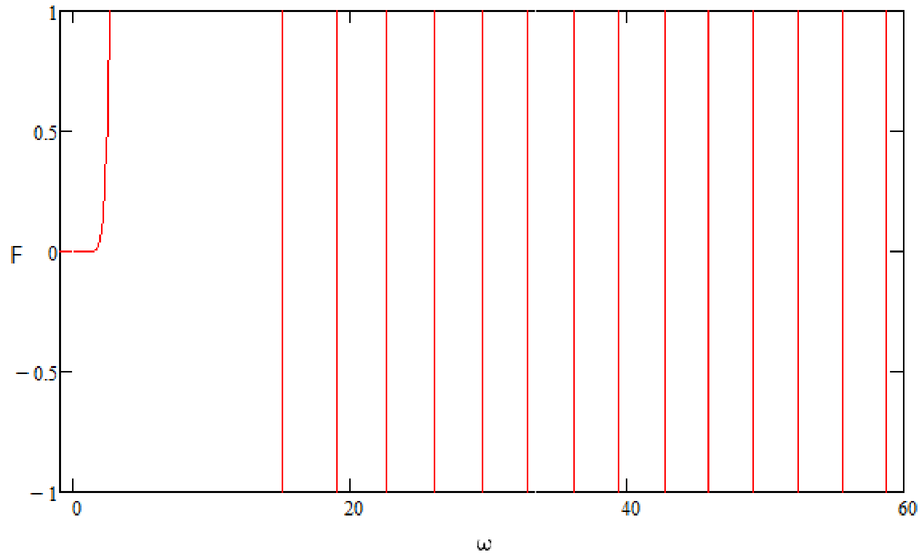
Перейдём к безразмерным переменным $k={k_1}/{k_2}$, $\omega^2={\lambda R_1^2}/{k_1}$, $R={R_1}/{R_2}$, тогда

характеристическое уравнение на λ примет вид

$$F(\omega,k,R,n) \equiv \frac{k\left(\omega J_{n-\frac{1}{2}}(\omega)-(n+1)J_{n+\frac{1}{2}}(\omega)\right)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega)} - \frac{Y_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)\left(\omega\sqrt{k}J_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})-(n+1)J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})\right)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})Y_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)-Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)} +$$

$$+\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)\left(\omega\sqrt{k}Y_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})-(n+1)Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})\right)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})Y_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)-Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)} = 0. \qquad (3.2)$$

*Численное решение при n=10, k=1, r=0,999999:*




**4. Приближение тонкого слоя**

Рассмотрим тонкий слой, тогда $\frac{R_2-R_1}{R_2} = 1 - R = \varepsilon \ll 1, \frac{1}{R} = \frac{1}{1-\varepsilon} \sim 1 + \varepsilon$.

Используя разложение в ряд Тейлора и формулы для производных функций Бесселя, из уравнения (3.2) находим

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\omega)\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon n-1\right)\left(J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})Y_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})-Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})J_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})\right)+\left(J_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})-Y_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})\right)o(\varepsilon^2)}{\varepsilon\left(J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})Y_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})-Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})J_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})\right)+\left(J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})-Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})\right)\frac{o(\varepsilon^2)}{\omega\sqrt{k}}} \approx$$

$$\approx (1-k)(n+1)J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) + k\omega J_{n-\frac{1}{2}}(\omega).$$

При $\varepsilon \to 0$ в нулевом приближении получим $J_{n+\frac{1}{2}}(\omega_0) \approx 0$, то есть $\omega_0^{(n)}$ такое же, как будто бы шар был однородным.